Roll No. ....

Total No. of Questions : **9**]

[Total No. of Printed Pages : **8**

(2041)

UG (CBCS) IIIrd Year (Annual) Examination

2622

B.A./B.Sc. MATHEMATICS

(Linear Algebra)

(DSE–3A.3)

Paper : MATH303TH

Time : 3 Hours] **[Maximum Marks : 70**

Note :– Attempt *five* questions in all. Section–A (Question No. **1**) is compulsory. Attempt *four* questions from Section–B, selecting *one* question each from the Units–I, II, III and IV. Marks are given against questions.

कुल **पाँच** प्रश्नों को हल कीजिए। खण्ड-अ (प्रश्न क्र. **1**) अनिवार्य है। प्रत्येक इकाई I, II, III व IV से **एक-एक** प्रश्न का चयन करते हुए खण्ड-ब से **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। अंक प्रश्न के सामने दिए गए हैं।

Section–A (खण्ड–अ)

Compulsory Question (अनिवार्य प्रश्न)

1\. (i) Show that $W = \{(a, b, c) : a = b = c\}$ is a subspace of $R^3(R)$.

दर्शाइए कि $W = \{(a, b, c) : a = b = c\}$, $R^3(R)$ का सबस्पेस है।

(ii) For what value of K, will the vector $v = (1, k, -4) \in V_3(R)$ is a linear combination of $v_1 = (1, -3, 2)$ and $v_2 = (2, -1, 1)$?

K के किस मान के लिए, वैक्टर $v = (1, k, -4) \in V_3(R)$, $v_1 = (1, -3, 2)$ और $v_2 = (2, -1, 1)$ का रैखिक संयोजन होगा ?

(iii) Define Sum of Two Subspaces.

दो उप-समुच्चयों के योग को परिभाषित कीजिए।

(iv) Let $x = (3, 0, -3)$, $y = (-1, 1, 2)$, $z = (4, 2, -2)$, $w = (2, 1, 1)$. Prove that x, y, z, w are Linearly Dependent.

माना $x = (3, 0, -3)$, $y = (-1, 1, 2)$, $z = (4, 2, -2)$, $w = (2, 1, 1)$। सिद्ध कीजिए कि x, y, z, w रैखिक आश्रित हैं।

(v) Describe explicitly the Linear Transformation $T : R^2 \to R^2$ such that $T(2, 3) = (4, 5)$ and $T(1, 0) = (0, 0)$.

रैखिक रूपांतरण $T : R^2 \to R^2$ इस प्रकार कि $T(2, 3) = (4, 5)$ तथा $T(1, 0) = (0, 0)$ का स्पष्टतया वर्णन कीजिए।

(vi) Let $T_1 : R^3 \to R^2$ and $T_2 : R^2 \to R^2$ be Linear Transformations defined by $T_1(x, y, z) = (3x, 4y - z)$ and $T_2(x, y) = (-x, y)$. Compute T_1T_2 and T_2T_1.

माना $T_1 : R^3 \to R^2$ तथा $T_2 : R^2 \to R^2$, $T_1(x, y, z) = (3x, 4y - z)$ तथा $T_2(x, y) = (-x, y)$ द्वारा परिभाषित रैखिक रूपांतरण हैं। T_1T_2 तथा T_2T_1 की गणना कीजिए।

(vii) Find characteristic polynomial for the linear operator $T : R^2 \to R^2$ defined by $T(x, y) = (x + 2y, 3x + 2y)$.

$T(x, y) = (x + 2y, 3x + 2y)$ द्वारा परिभाषित रैखिक ऑपरेटर $T : R^2 \to R^2$ के लिए अभिलाक्षणिक बहुपद ज्ञात कीजिए।

(viii) Define Non-singular and Singular Linear Transformation.

नॉन-सिंगुलर और सिंगुलर रैखिक रूपांतरण को परिभाषित कीजिए। $2 \times 8 = 16$

Section–B (खण्ड–ब)

Unit–I (इकाई–I)

2\. (a) Prove that a non-empty subset W of a vector space V(F) is a subspace of V, if and only if :

(i) $x + y \in W \quad \forall\, x, y \in W$

(ii) $\alpha x \in W \quad \forall\, x, \in W, \forall\, \alpha \in W$

सिद्ध कीजिए कि वेक्टर स्पेस V(F) का अरिक्त उप-समुच्चय W, V का सब-स्पेस है यदि और केवल यदि :

(i) $x + y \in W \quad \forall\, x, y \in W$

(ii) $\alpha x \in W \quad \forall\, x, \in W, \forall\, \alpha \in W$

(b) Show that $W = \{(a, b, c); a = b - c$ and $2a + 3b - c = 0\}$ is a subspace of vector space $R^3(R)$.

दर्शाइए कि $W = \{(a, b, c); a = b - c$ और $2a + 3b - c = 0\}$ वेक्टर स्पेस $R^3(R)$ का सब-स्पेस है। 6½,7

3. (a) Let W_1 and W_2 be two subspaces. Prove that $W_1 + W_2$ is a subspace of V(F).

माना कि W_1 तथा W_2 दो सब-स्पेस हैं। सिद्ध कीजिए कि $W_1 + W_2$, V(F) का एक सब-स्पेस है।

(b) Show that set of all matrices form $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, where $a, b \in \mathbf{C}$ is a vector space over $\mathbf{C}$ under matrix addition and scalar multiplication.

दर्शाइए कि सभी आव्यूहों का समुच्चय $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ बताता है, जहाँ $a, b \in \mathbf{C}$ मैक्ट्रिस योग तथा स्केलर गुणन के अन्तर्गत $\mathbf{C}$ पर वेक्टर स्पेस है। 6½,7

Unit–II (इकाई–II)

4. (a) If V(F) is a vector space, then prove that the set S of non-zero vectors $v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots, v_n \in V$ is linearly dependent. If and only if some vectors $v_m \in S$, $2 \le m \le n$ is a linear combination of its preceding vectors.

यदि V(F) एक वेक्टर स्पेस है तो सिद्ध कीजिए कि नॉन-जीरो वेक्टरों $v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots, v_n \in V$ का समुच्चय S रैखिक आश्रित है। यदि और केवल यदि एक समान वेक्टर $v_m \in S$, $2 \le m \le n$ अपने पूर्ववर्ती वेक्टर्स का रैखिक संयोजन है।

(b) Let $x = (1, 2, -1)$, $y = (2, -3, 2)$, $z = (4, 1, 3)$, $w = (-3, 1, 2)$ be vectors in $R^3(R)$, show that $L(\{x, y\}) \ne L(\{z, w\})$.

माना $x = (1, 2, -1)$, $y = (2, -3, 2)$, $z = (4, 1, 3)$, $w = (-3, 1, 2)$ वेक्टर्स हैं $R^3(R)$ में, तो दर्शाइए कि $L(\{x, y\}) \ne L(\{z, w\})$। 6½,7

5. (a) Show that the vectors (1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, –1, –1) of R^3 form a basis of $R^3(R)$. Also find coordinate vector of (–3, 5, 7) relative to this basis.

दर्शाइए कि R^3 के वेक्टर (1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, –1, –1), $R^3(R)$ का आधार बनाते हैं। इस आधार के सापेक्ष (–3, 5, 7) का कोऑर्डिनेट वेक्टर ज्ञात कीजिए।

(b) Find a basis and dimension of the subspace W of R^4 generated by the following vectors : (1, 2, 3, 5), (2, 3, 5, 8), (3, 4, 7, 11), (1, 1, 2, 3) and extend it to a basis of R^4.

निम्नलिखित वेक्टरों से जनित R^4 के सब-स्पेस W का आधार और आयाम ज्ञात कीजिए : (1, 2, 3, 5), (2, 3, 5, 8), (3, 4, 7, 11), (1, 1, 2, 3) तथा इसे R^4 के आधार तक बढ़ाइए। 6½,7

Unit–III (इकाई–III)

6. (a) If V(F) and W(F) are vector spaces, then prove that $T : V \to W$ is a linear transformation if and only if $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$ $\forall\ u, v \in V\ \forall\ \alpha, \beta \in F$.

यदि V(F) और W(F) वेक्टर सब-स्पेस हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $T : V \to W$ एक रैखिक रूपांतरण है यदि और केवल यदि $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$ $\forall\ u, v \in V\ \forall\ \alpha, \beta \in F$।

(b) For the linear transformation $T : R^2 \to R^3$ defined by $T(x, y) = (x + y, x - y, y)$. Find basis and dimension of :

(i) Its range space

(ii) Its Null Space.

Also verify Rank(T) + Nullity T = dim V

$T(x, y) = (x + y, x - y, y)$ द्वारा परिभाषित रैखिक रूपांतरण $T : R^2 \to R^3$ के लिए निम्न का आधार और आयाम ज्ञात कीजिए :

(i) इसका रेंज स्पेस

(ii) इसका शून्य स्पेस। 6½,7

सत्यापित भी कीजिए–Rank(T) + Nullity T = dim V

7. (a) Show that $T : R^3 \to R^2$ defined by $T(x, y, z) = (z, x + y)$ is linear transformation.

$T(x, y, z) = (z, x + y)$ द्वारा परिभाषित $T : R^3 \to R^2$ रैखिक रूपांतरण है।

(b) Let T be linear operator on R^3 defined by $T(x, y, z) = (2z, x - 2y, x + 2y)$. Find matrix of T relative to the basis B = {(1, 2, 1), (1, 1, 1), (1, 1, 0)}

माना कि $T(x, y, z) = (2z, x - 2y, x + 2y)$ द्वारा परिभाषित R^3 पर T रैखिक ऑपरेटर है। आधार B = {(1, 2, 1), (1, 1, 1), (1, 1, 0)} के सापेक्ष T का मैट्रिक्स ज्ञात कीजिए। 6½,7

Unit–IV (इकाई–IV)

8. (a) Show that linear transformation, $T : R^3 \to R^3$ defined by $T(x, y, z) = (x, \lambda y, z)$, where λ is a fixed real non-zero is bijective (or an Isomorphism).

$T(x, y, z) = (x, \lambda y, z)$ द्वारा परिभाषित रैखिक रूपांतरण $T : R^3 \rightarrow R^3$, जहाँ λ स्थिर वास्तविक नॉन-जीरो है, विभाजित है (या आइसोमॉर्फिज्म है)।

(b) Find the dual basis for $B = \{v_1\ v_2\}$ of R^2 over R, where $v_1 = (1, 2)$ and $v_2 = (1, 5)$.

R पर R^2 का $B = \{v_1\ v_2\}$ के लिए द्वैध आधार ज्ञात कीजिए, जहाँ $v_1 = (1, 2)$ और $v_2 = (1, 5)$। 6½,7

9. (a) Let λ be an eigenvalue of an invertible operator T on a vector space V(F). Prove that λ^{-1} is an eigenvalue of T^{-1}.

माना कि λ वेक्टर स्पेस V(F) पर उल्टा ऑपरेटर T का आइगेन मान है। सिद्ध कीजिए कि λ^{-1}, T^{-1} का आइगेन मान है।

(b) Find all the eigenvalues and basis for each eigenspace of linear operator $T : R^3 \rightarrow R^3$ defined by $T(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z)$.

$T(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z)$ द्वारा परिभाषित रैखिक ऑपरेटर $T : R^3 \rightarrow R^3$ के प्रत्येक आइगेन मान के लिए सभी आइगेन मान और आधार ज्ञात कीजिए। 6½,7